Katalogizace v knize – Národní knihovna ČR

Peregrin, Jaroslav
Co je nového v logice / Jaroslav Peregrin.
1. vydání. – Praha: Nová beseda, z. s., 2018
Anglické resumé
ISBN 978-80-906751-5-5

16 * (049)
– logika
– pojednání

16 - Logika [5]

ISBN 978-80-906751-5-5

Obsah

O co v logice jde

Co je to vlastně logika?

Knížku o tom, co je nového v logice, nelze, obávám se, začít jinak než shrnutím toho, co je v logice starého. Logika je totiž na rozdíl od biologie, fyziky či literární kritiky naukou, jejíž předmět není pro neodborníky příliš průhledný; a musíme tedy nejdříve objasnit, o co přesně se v ní vlastně jedná.

Říkáme-li, že předmět logiky není průhledný, neříkáme tím ovšem, že mnoha lidem *nepřipadá* průhledný. Copak logika není nauka o správném myšlení? Nepozvedá snad naše myšlení na úroveň, na které neomylně pronikáme k podstatě záhad, tak jak to činil Sherlock Holmes? Ostatně v *Studii v šarlatové* od Arthura Conana Doylea sám Sherlock říká:

> Z kapky vody může logik vyvodit možnost Atlantiku či Niagary, aniž by to či ono viděl nebo slyšel. Celý život je jeden velký řetěz, jehož povahu poznáme, když se nám ukáže jeden jeho jediný článek. Jako každé jiné umění, lze si i vědu dedukce a analýzy osvojit jedině dlouhým a trpělivým studiem, ale lidský život není dost dlouhý na to, aby smrtelníkovi dovolil v ní dosáhnout nejvyšší dokonalosti. Než se budeme věnovat oněm morálním a mentálním aspektům této věci, které představují největší potíže, nechť výzkumník začne zvládáním elementárnějších problémů.[1]

Dělali bychom si ovšem velmi přehnané naděje, kdybychom očekávali, že nás učebnice moderní logiky dovedou

[1] Z angl. orig. *A Study in Scarlet* přeložil J. Peregrin. Originál dostupný z WWW: https://www.gutenberg.org/files/244/244-h/244-h.htm [cit. 6. 2. 2018].

k tomu, abychom dokázali z kapky vody vyvodit možnost Atlantiku či Niagary nebo abychom z jednoho článku řetězu lidského života dokázali vyvodit povahu celého řetězu. Řekněme, že to, co se dnes zkoumá a vyučuje pod hlavičkou logiky, je ono „zvládání elementárnějších problémů", ke kterému nás velký Sherlock nabádá, předtím než se pustíme do těch obtížnějších věcí („morálních a mentálních" – ať už to má znamenat cokoli).

Pokud se člověk podívá do nějaké běžné učebnice logiky, zjistí, že co se v ní probírá, se vlastně netýká vůbec ničeho tak vzrušujícího, jako je řešení sherlockovských (či jiných) záhad; že se v ní probírá vlastně jenom dosti omezený a poněkud přízemní soubor „myšlenkových postupů". Jestliže je tedy logika někdy předkládána jako *věda o správném myšlení*, je to v mnohých ohledech přehnané a zavádějící. Předně, logika se určitě nijak přímo netýká takových aspektů našeho myšlení, jako jsou třeba obrazotvornost či nápaditost, které k němu jistě neodmyslitelně patří. Takže pokud chceme logiku vztahovat k myšlení, musela by to být jenom nějaká jeho specifická část, řekněme taková, které by se dalo říkat *usuzování*. V moderní logice vlastně nejde o nic moc jiného než o mapování toho, jaké výroky vyplývají z jakých jiných výroků, a navíc zejména jen o takové případy vyplývání, které jsou zprostředkovány „logickými" výrazy, jako jsou *a*, *nebo*, *jestliže–pak*, *každý* ap.

Navíc logika vlastně ani vůbec není o myšlení – pokud myšlením rozumíme to, co se člověku děje „v hlavě". Jak na to vehementně upozorňoval už praotec moderní logiky Gottlob Frege[2], o tom, co se děje v mysli, se vlastně velmi těžko dělají

[2] Gottlob Frege (1848–1925) byl za svého života považován za ne příliš úspěšného matematika. Dnes se nicméně má za to, že byl nejenom klíčovou postavou v rámci zrodu moderní logiky, ale i zakladatelem filozofického směru, kterému se dnes říká *analytická filozofie*.

nějaké teorie – zkušenost s myslí má každý jen s tou svou (a přísně vzato vlastně nevíme, jestli to v myslích jiných lidí chodí podobně). Navíc, jak Frege zdůrazňoval, logika směřuje k něčemu jako *zákonům*, které jsou *objektivní*, a tudíž nemohou souviset s tím, co se děje v něčí subjektivní mysli.[3] Konstatuje-li logika, že výrok

Ulice jsou mokré

nemůže být pravdivý, pokud je pravdivý výrok

Ulice nejsou mokré,

nebo že naopak musí být pravdivý, pokud jsou pravdivé výroky

Jestliže prší, jsou ulice mokré

a

Prší,

pak to jsou *objektivní* fakta, která jsou na tom, co si kdo myslí, závislá stejně tak málo jako třeba fakt, že Česko neleží u moře.

Dostáváme se tedy k tomu, čím se logika – podle Frega a podle názoru obecně přijatého moderní logikou – skutečně zabývá: jejím primárním předmětem zájmu je správnost úsudků. Logika konstatuje, že úsudek, který vede od předpokladů

[3] Viz FREGE, G. „Der Gedanke. Eine logische Untersuchung". In *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, sv. I, 1918–1919. Verlag der Kenserschen Buchhandlung, 1918, s. 58–77; v českém překladu vyšlo jako „Myšlenka". In *Logická zkoumání. Základy aritmetiky*. Praha: Oikoymenh, 2011, s. 95–122.

Jestliže prší, jsou ulice mokré a *Prší* k závěru *Ulice jsou mokré*, neboli úsudek

(U1) *Jestliže prší, jsou ulice mokré*
Prší
―――――――――――――
Ulice jsou mokré,

je správný, zatímco úsudek, který by měl – bez ohledu na své předpoklady – závěr *Ulice jsou mokré a nejsou mokré*, je nesprávný.

K tomu je ovšem potřeba dodat několik vysvětlení. Zaprvé, když říkáme, že je úsudek (U1) správný, neříkáme tím, že jsou správné jeho předpoklady. Netvrdíme, že je věta *Jestliže prší, jsou ulice mokré* pravdivá. (Dovedeme si představit situaci, kdy prší a ulice *nejsou* mokré – např. když jsou sluncem tak rozpálené, že se na nich déšť hned odpařuje.) Správnost úsudku a pravdivost jeho předpokladů jsou tedy dvě různé věci.

Zadruhé, říkáme-li, že správnost úsudků je *primárním* předmětem zájmu logiky, pak tím rozhodně neříkáme, že je to jediná věc, kterou se logika legitimně zabývá. Do oblasti zájmu logiky se sekundárně dostala spousta dalších věcí, které se většinou od problému správnosti úsudků odvinuly, ale které s touto správností souvisejí třeba již jenom velmi volně. (Je také třeba říci, že v některých etapách svého historického vývoje se logika chápala i podstatně šířeji, někdy dokonce až jako obecná *teorie poznání*.)

Zatřetí, konstatujeme-li, že se logika zabývá úsudky, jako je (U1), nechceme tím říci, že se zabývá jenom takovými banalitami. Jednou z klíčových myšlenek moderní logiky je, že i velmi složité úsudky, se kterými se setkáváme třeba v komplikovaných matematických teoriích, mohou být nahlédnuty jako poskládané z úsudků jednoduchých, jako je (U1). Zabýváme-li se tedy takovými elementárními úsudky, zabýváme se něčím jako „abecedou usuzování“.

Vezměme úsudky

(U2) $\dfrac{\textit{Žádný pes není chlupatý}}{\textit{Ne každý pes je chlupatý}}$

(U3) $\dfrac{\textit{Ne každý pes je chlupatý}}{\textit{Žádný pes není chlupatý}}$.

I když asi bez větších obtíží dokážeme nahlédnout, že ten první je správný, zatímco ten druhý správný není (v případě toho prvního pravdivost jeho předpokladu *zaručuje* pravdivost jeho závěru, zatímco v případě toho druhého tomu tak není, neboť jeho předpoklad připouští, že někteří psi chlupatí jsou), není to už tak triviální jako v případě (U1). Proto může být užitečné takovéto úsudky rozložit do řetězců nějakých elementárnějších úsudků, a tak jejich správnost prokázat – a to je právě úkol pro logiku. Vezměme si nějaký už vůbec ne triviální příklad: tzv. Velká Fermatova věta, kterou se matematici marně pokoušeli dokázat po několik staletí (až se to podařilo v roce 1993)[4] vyplývá, tak jako každá jiná matematická pravda, z jistých velmi elementárních předpokladů týkajících se čísel, sčítání a násobení, přičemž rozložit úsudek tvořený těmito předpoklady a touto větou jako závěrem na řetězec elementárních odvození, což v důsledku není nic jiného než nalezení *důkazu* Velké Fermatovy věty, je vskutku olbřímí úkol.

Začtvrté, zabýváme-li se úsudky, jako jsou (U1)–(U3), pak se patrně zabýváme spíše jazykem než myšlením

[4] Viz o tom SINGH, Simon. *Fermat’s Last Theorem*. London: Fourth Estate, 1997; český překlad *Velká Fermatova věta*. Praha: Academia, 2000.

– konstatujeme-li správnost úsudku, jako je (U1), pak tím, zdá se, *de facto* říkáme, že je mezi větami našeho jazyka určitý vztah. To je ovšem v podstatě věci: vzhledem k tomu, že do myslí jiných lidí nevidíme, můžeme stěží konstatovat, podle jakých zákonů se v nich pohybují myšlenky (pokud nějaké takové zákony vůbec existují), a musíme se soustředit na to, co je objektivnímu zkoumání přístupné, a to je jazyk a jeho pravidla.

Logika a úsudky

Logika se tedy týká úsudků jakožto jazykových útvarů; jako její primární předmět proto můžeme vidět především to, jaké věty v našem jazyce vyplývají – a jsou správně odvoditelné – z jiných vět. Co činí např. (U2) správným a (U3) nesprávným? Jsou to zřejmě významy slov a vět, ze kterých se tyto úsudky skládají, případně pravidla, kterými se užívání těchto slov a vět řídí. Představme si, že by český výraz *ne každý* znamenal to, co nyní znamená *žádný* (a naopak), a *není* by znamenalo *je* (a naopak) – pak by zřejmě byl naopak správný úsudek (U2) a nesprávný (U3). Můžeme to tedy vidět tak, že předpoklady a závěrem úsudku jsou nikoli věty, ale jejich významy (těm se někdy v logické hantýrce říká *propozice*). Avšak vzhledem k tomu, že k propozicím máme přístup jenom skrze věty, které je vyjadřují, můžeme se klidně i nadále bavit prostě o větách nebo o výrocích.

Můžeme samozřejmě říkat, že v úsudcích jde o *myšlenky*, pokud slovem *myšlenka* rozumíme něco jako význam věty, tj. propozici. (Takový význam slovo *myšlenka* jistě také má – můžeme říci, že třeba Pythagorova věta vyjadřuje určitou myšlenku ap.) Horší by to bylo, kdybychom tím slovem mysleli něco jako nějaký faktický děj v mysli, něco, co se nám „honí hlavou“, něco, co samo o sobě nemá nic společného s jazykem a co musíme do jazyka jenom „odít“, když to chceme někomu sdělit. Tady bychom narazili na problémy, se kterými se potýkal Frege a které ho nakonec vedly k prohlášení, že logika nemůže mít s psychologií mnoho společného.

Nemohli bychom tedy logiku vidět jako hledání pravidel pro *správné* zacházení s našimi myšlenkami v tom smyslu, abychom tak dospěli k něčemu žádoucímu (k pravdě, poznání nebo tak něčemu)? Nemohla by nám poskytovat něco jako návod pro to, jak se snažit své myšlenky směrovat, abychom se dopracovali tam, kam potřebujeme? Problém je, že když se třeba podíváme, jak někteří z nejvýznamnějších vědců podle svých slov dospěli k největším objevům, vidíme, že se to děje zcela nepředvídatelným způsobem, který rozhodně nepřipomíná nic jako řetězení úsudků, jaké najdeme v učebnici logiky. (Viz např. často zmiňovaný příběh chemika Augusta Kekulého, který objevil cyklický vzorec benzenu poté, co se mu před vnitřním zrakem objevil had zakousnutý do vlastního ocasu.)[5]

Na úsudky, které logika označuje za správné, se tedy nelze dívat ani jako na popisy toho, jak myslíme, ani jako na předpisy pro to, jak myslet máme. Je ovšem důležité zdůraznit, že toto nelze chápat jako nějaké *omezení* logiky, která opravdu nemůže proniknout do individuálních myslí, ke skutečným myšlenkám, neznamená to však, že se musí spokojit s nějakými jejich náhražkami – větami. Přiměřenější je to vidět tak, že opravdové usuzování vzniká až tam, kde jsou původně nejasné a chaotické individuální myšlenky pomocí vět zafixovány jako kolektivně přístupné propozice, které se řídí objektivně poznatelnými zákony.

Není také od věci si v tomto kontextu připomenout, jak společenským tvorem člověk je. Velká většina toho, čeho jsme v průběhu vývoje našeho druhu dosáhli, se tak či onak opírá o naši spolupráci – montovat automobily, létat do vesmíru, prosazovat lidská práva, to všechno jsou věci, které jsou zřejmě *kolektivními*, nikoli individuálními podniky. Mělo by být usuzování v tomto ohledu výjimkou? Je skutečně výkonem pouze individuální mysli a nijak nesouvisí s lidskou společenskostí?

[5] Viz též např. HADAMARD, Jacques. *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. 2. vydání. New York: Dover Publications, 1954.

Je nepochybné, že naše poznávání světa je v mnoha ohledech kolektivním a kooperativním podnikem. Bez ohledu na zkazky o osamělých géniích a jejich objevech, každý stojí „na ramenou obrů“, v tom smyslu, že může – a fakticky, chce-li postoupit někam kupředu, musí – navazovat na poznání, které tu už je; a svůj objev přidává k zásobárně toho, na co se dál dá navazovat. Proto je u každého nového poznatku, ke kterému někdo dospěje, zásadní, aby ho dokázal sdělit ostatním a především aby jim dokázal předvést, že to je skutečný poznatek. (Ostatně to musí dokázat předvést i sobě samému: má-li nějaký nápad, který mu připadá geniální, ještě to neznamená, že skutečně geniální je…) A tady přichází do hry usuzování v podobě interaktivní argumentace, která už je jako taková vystavena kontrole podle pravidel stanovených logikou. Správnost úsudků, kterou vymezuje logika, tedy má co do činění především s interindividuální argumentací a s hranicemi prostoru, ve kterém se taková argumentace může odehrávat. V jistém smyslu je to trochu podobné pravidlům šachu: zatímco ta nám říkají, např. jak zacházet se střelcem (že s ním lze tahat po diagonále, a nikoli jinak), logika nám říká, jak např. zacházet s výrazy, jako jsou *nebo*, *ne* či *každý*.

Logické kalkuly

Jak můžeme prokázat, že je nějaký úsudek správný? U některých jednoduchých úsudků to prostě „vidíme“; že jsou správné, chápe každý, kdo jim rozumí. Vezměme např. úsudek

(U4) $\dfrac{\textit{Prší a je tma}}{\textit{Prší.}}$

Každý, kdo rozumí česky, vidí, že je tento úsudek správný. Obecněji vidí, že správný je každý úsudek tvaru

(UF4) $\dfrac{A \text{ a } B}{A.}$

Kdyby někdo jeho správnost zpochybňoval, kdyby někdo třeba říkal, že prší a je tma, ale přesto neprší, měli bychom odůvodněné pochybnosti, zda rozumí česky, konkrétněji jestli ví, co znamená spojka *a*. Podobně to bude třeba s malinko méně triviálním úsudkem

(U5) *Všichni psi jsou savci*
Všichni savci jsou obratlovci
Všichni psi jsou obratlovci

a obecněji všemi úsudky tvaru

(UF5) *Všichni A jsou B*
Všichni B jsou C
Všichni A jsou C.

Avšak jak už jsme konstatovali, správnost zdaleka ne všech úsudků je takto zřejmá. Složitější úsudky se logici odedávna snažili „převést“ na úsudky průhlednější, případně jejich správnost pomocí oněch průhlednějších úsudků nějak prokázat. Vezměme úsudek

(U6) *Všichni psi jsou savci*
Ne všichni psi jsou chlupatí
Ne všichni savci jsou chlupatí

a obecněji každý úsudek tvaru

(UF6) *Všichni A jsou B*
Ne všichni A jsou C
Ne všichni B jsou C.

I tento úsudek by asi leckdo rovnou nahlédl jako správný; ale není to tak zřejmé jako u toho předchozího, takže např. Aristoteles považuje za nutné prokázat, že jeho správnost plyne ze správnosti úsudků tvaru (UF5). Činí to tak, že se ptá, zda by za předpokladů (U6) mohl neplatit jeho závěr. Předpokládejme tedy, říká, že platí opak tohoto závěru, tj.

Všichni savci jsou chlupatí.

Z prvního předpokladu (U6) spolu s tímto předpokladem ovšem podle (UF5) plyne

Všichni psi jsou chlupatí,

což je v přímém rozporu s druhým předpokladem (U6). Takže opak závěru (U6), pokud platí jeho předpoklady, platit nemůže – a musí tedy platit tento závěr.

Na počátku dvacátého století se moderní logika pokoušela především o vývoj velmi sofistikovaných „kalkulů", které by nám takto dovolily „spočítat", co z čeho plyne, a které úsudky jsou tedy správné. Takové kalkuly většinou nabývají podoby určitých axiomatických systémů, které, podobně jako v případě aristotelského kalkulu, vycházejí z nějakých zřejmě správných úsudků a od nich se přes určitá pravidla propracovávají k úsudkům méně zřejmě správným. Takovým kalkulům se někdy říká *gentzenovské*, podle Gerharda Gentzena[6], který tuto metodu rozpracoval.

Například je-li správným úsudkem každý úsudek výše uvedeného tvaru (UF4) a také každý úsudek tvaru[7]

(UF7) $\dfrac{A}{A \text{ nebo } B,}$

je z nich podle pravidel gentzenovského kalkulu možné složit správný úsudek tvaru

(UF8) $\dfrac{A \text{ a } B}{A \text{ nebo } B.}$

[6] Gerhard Gentzen (1909–1945) byl německý logik (zemřel na konci války v českém vězení, kam byl zavřen kvůli tomu, že jako profesor pražské německé univerzity údajně podporoval nacistický režim). Práce, ve kterých položil základy své verze logických kalkulů, publikoval ve třicátých letech.

[7] To je ovšem na první pohled divný úsudek. Vědět, že *A nebo B* (například *Prší nebo sněží*) znamená vědět méně než vědět *A* (*Prší*); takže tento úsudek nás zdánlivě posouvá v podivném směru zbavování se vědění. To je pravda; nicméně když říkáme, že je tento úsudek správný, říkáme jenom to, že předpoklad tohoto úsudku garantuje jeho závěr, tj. že tento předpoklad nemůže být pravdivý bez toho, aby byl pravdivý i závěr. A tak tomu jistě je.

Správnost tohoto posledního typu úsudků tedy bude odvoditelná ze správnosti (UF4) a (UF7) pomocí obecného pravidla pro skládání úsudků, podle kterého, je-li správným úsudkem

$$\frac{A}{B}$$

a současně

$$\frac{B}{C},$$

je pak správným úsudkem i

$$\frac{A}{C}.$$

Chronologicky starší alternativou ke gentzenovským kalkulům jsou tzv. hilbertovské kalkuly (podle Davida Hilberta[8]), které mají opět povahu axiomatických systémů, ale poněkud jiného druhu. Axiomy jsou v jejich případě nějaké zřejmě pravdivé výroky (určitých tvarů) a odvozovací pravidla nás pak vedou od pravdivých k dalším pravdivým výrokům. Úsudek je pak podle takového kalkulu správný, je-li možné se od jeho premis dostat k závěru nějakou postupnou aplikací odvozovacích pravidel.

Vztah mezi gentzenovskými a hilbertovskými kalkuly se odvíjí od faktu, že (správné) úsudky můžeme vyjádřit (pravdivými) větami za pomoci spojení *jestliže–pak*. Jsou-li tedy mezi axiomatickými úsudky gentzenovského kalkulu (UF4) a (UF7),

[8] David Hilbert (1862–1943) byl věhlasný německý matematik a logik.

budou axiomy odpovídajícího hilbertovského kalkulu výroky

Jestliže A a B, pak A
Jestliže A, pak A nebo B.

K základním pravidlům takového kalkulu pak bude patřit

$$\text{(MP)}\quad \frac{\begin{array}{l}\textit{Jestliže A, pak B}\\ \textit{A}\end{array}}{\textit{B.}}$$

Takže vezmeme-li za předpoklad *A a B*, budeme moci provést následující řetězec odvození:

$$\dfrac{\dfrac{\textit{A a B} \qquad \textit{Jestliže A a B, pak A}}{\textit{A}} \qquad \textit{Jestliže A, pak A nebo B}}{\textit{A nebo B.}}$$

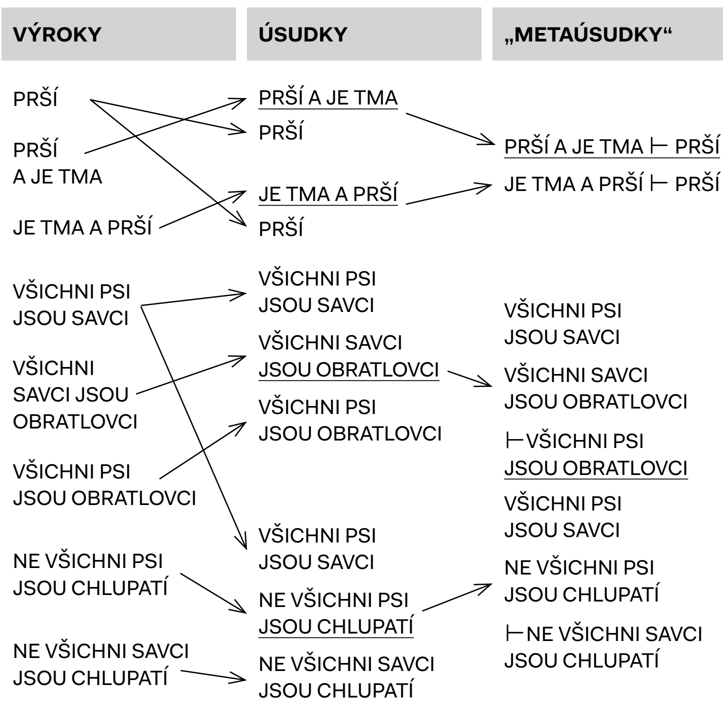
Tím opět docházíme k tomu, že i zde je závěr *A nebo B* odvoditelný z *A a B*.

Jak bylo řečeno, předmětem zájmu logiky je především fakt, že některé výroky *vyplývají* z jiných výroků. Logické kalkuly těch druhů, které jsme právě v náznaku předvedli, budují relace *odvoditelnosti* mezi výroky tak, aby se to, co je z čeho odvoditelné, dalo „spočítat". Přitom teoretická relace odvoditelnosti by se měla překrýt s preteoretickou relací vyplývání; takže odvoditelnost by vlastně měla být teoretickou rekonstrukcí vyplývání.

Navíc, máme-li specifikovanou odvoditelnost, budou některé výroky patrně odvoditelné i z prázdné množiny předpokladů. Takovým výrokům se pak říká *teorémy* daného kalkulu a mohli bychom uvažovat o tom, že tyto teorémy by mohly odpovídat těm výrokům, které jsou pravdivé – vlastnost *být teorémem* by mohla být teoretickou rekonstrukcí vlastnosti *být pravdivý*. To ovšem zjevně není možné v případě výroků, jejichž pravdivostní hodnota se mění: nemůžeme mít rozumný kalkul, jehož teorémem bude výrok *Venku prší*, nebo *Venku neprší*, protože tyto výroky si své pravdivostní hodnoty každou chvíli vyměňují. O něčem takovém bychom ale mohli uvažovat např. v případě výroků matematiky – takové výroky své pravdivostní hodnoty nemění a kalkul, jehož teorémy by byly právě všechny pravdivé výroky nějaké části matematiky, tedy představitelný je. Jako oblast, která by takto mohla být nejslibněji zvládnutelná, se pak jevila aritmetika, nauka o sčítání a násobení přirozených čísel.

Struktura logických kalkulů

Abychom si strukturu logických kalkulů poněkud objasnili, zopakujme, že tu hovoříme o třech úrovních: o výrocích, ze kterých můžeme skládat úsudky a z nich pak „metaúsudky“. Úsudek se skládá z výroků: má předpoklady (což jsou výroky) a závěr (což je opět výrok). Závěr od předpokladů oddělujeme, jak jsme to dosud činili, vodorovnou čárou; ale úsudek můžeme zapsat i tak, že závěr od předpokladů oddělíme znakem „⊢“ (což pak umožňuje poněkud kompaktnější zápis). A podobně jako se úsudek skládá z výroků, se „metaúsudek“ skládá z úsudků: jeho předpoklady jsou úsudky a jeho závěrem je opět úsudek. Můžeme tedy vytvořit následující tabulku:



Logice ovšem nejde ani tak o jednotlivé úsudky, ale o obecná *pravidla*, jak odvozovat výroky z výroků, případně úsudky z úsudků. Taková pravidla mají podobu úsudkových schémat: pravidlo, kterým je dána správnost úsudku, jako je

(U4) $\dfrac{\textit{Prší a je tma}}{\textit{Prší},}$

můžeme zachytit jako schéma

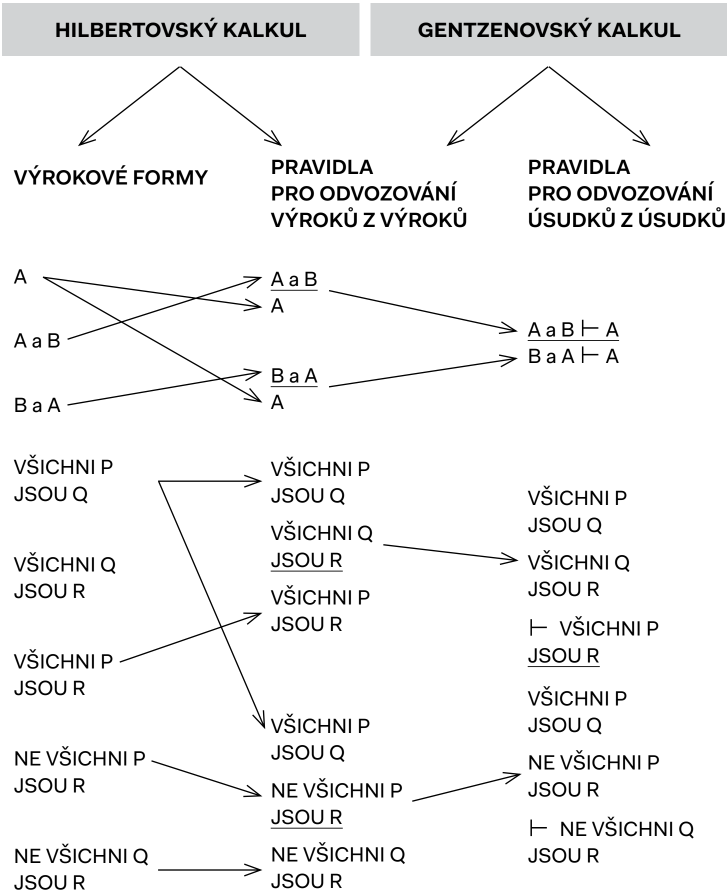
(UF4) $\dfrac{A \text{ a } B}{A.}$

Přitom jediný konkrétní výraz, který v tomto schématu figuruje, je spojka *a* (ostatní konkrétní výrazy jsou nahrazeny bezobsažnými symboly), což je výraz, který je obvykle považován za „logický“[9]. Pravidla, o která v logice jde, jsou tedy obvykle reprezentována úsudkovými formami, které se skládají z „logických forem“ výroků: taková forma obsahuje jenom „logické“ výrazy, zatímco ty ostatní jsou z ní odstraněny. Pravidlo reprezentované schématem (UF4) nám pak říká: z výroku tvaru *A a B* (tedy např. z výroku *Prší a je tma*) lze odvodit příslušný výrok *A* (*Prší*).

Posuneme-li se tedy od konkrétních úsudků k jejich formám, tj. k příslušným pravidlům, mění se nám předchozí tabulka na tabulku, která je na následující straně.

Při budování takových kalkulů se mj. ukázalo, že skutečně efektivními se stanou tehdy, až nebudou aplikovány přímo na

[9] Hranice mezi „logickými“ a „mimologickými“ výrazy v přirozeném jazyce ovšem není nijak ostrá. Mezi ty první se standardně řadí *a*, *nebo*, *ne*, *jestliže–pak*, *každý*, *nějaký* atd., určitě mezi ně nepatří výrazy jako *ruka*, *rychle*, *černý* ap. V šedé zóně mezi nimi se pak nacházejí výrazy jako *někdy*, *většina*, *pravděpodobně* ap.



přirozený jazyk, ale na nějakou jeho zjednodušenou a standardizovanou verzi. Tak vznikly dobře známé logické symboly, jako jsou $\wedge$, $\vee$ či $\rightarrow$, které byly použity jako „zdokonalené“ protipóly přirozeně jazykových spojek *a*, *nebo* či *jestliže–pak*. Poněkud komplikovanějším způsobem se do logiky propracovaly *kvantifikátory*, $\forall$ a $\exists$, které se z výrazových prostředků přirozeného jazyka neodvinuly tak přímočarým způsobem jako logické spojky.

V rámci moderní logiky, jako součást jejího úsilí o budování kalkulů, se navíc objevila bezprecedentní myšlenka: nejenom nahradit jednotlivé „logické“ výrazy přirozeného jazyka jejich exaktně definovanými verzemi a s jejich pomocí zachytit logické struktury výroků, ale vytvořit exaktně definovanou verzi logické struktury celého přirozeného jazyka. Pokud abstrahujeme od jiných než logických výrazů – tak, že je nahradíme, jak jsme to činili výše, neutrálními, bezobsažnými symboly a logické výrazy nahradíme jejich přesně definovanými variantami – dostaneme *formální jazyk*, který je přesně vymezený a přitom zachycuje logickou strukturu přirozeného jazyka.

Můžeme pak také vytvářet umělé jazyky této formy – tím, že v ní ony bezobsažné symboly nahradíme přesně definovanými variantami nějakých mimologických výrazů. Takové jazyky, kterým můžeme říkat *formalizované*, nám pak mohou sloužit jako „modely“ nějakých částí přirozeného jazyka. (Vezmeme-li např. číslice, symboly pro sčítání a násobení ap., můžeme takto vytvořit přesně definovaný jazyk aritmetiky.)

Od kalkulů k sémantice a zpět

Umělé jazyky logiky, které se postupně dostávaly do centra pozornosti logiků, byly ovšem strukturami vytvořenými od základů našimi definicemi, tj. v podstatě strukturami matematickými. (K tomu je třeba zmínit, že moderní matematika se od zkoumání čísel čím dál více posouvá k obecnému zkoumání abstraktních struktur.) A jejich matematické studium vedlo ke spoustě pozoruhodných matematických problémů, které daly vzniknout *matematické logice*[10]. Tento vývoj akceleroval zvláště ve třicátých letech dvacátého století, kdy Kurt Gödel[11] poukázal na jednu do té doby netušenou a totálně překvapivou vlastnost jazyků logiky, totiž že některé složitější logické teorie v těchto jazycích nemohou být axiomatizovány[12] – tj. představa, že se dokazatelnost může stát plně adekvátní náhražkou, či alespoň teoretickou rekonstrukcí vyplývání a pravdivosti (alespoň té matematické), není realistická.

Již předtím však stačil David Hilbert rozjet svůj ambiciózní program „teorie důkazů" (*proof theory*)[13]. Ten vycházel

[10] To je v podstatě už matematická disciplína, zkoumající struktury, které při budování umělých jazyků logiky vznikly, nebo jejich odvozeniny. Viz SOCHOR, Antonín. *Klasická matematická logika*, Praha: Karolinum, 2001; viz též Crossley, J. N. „What Is Mathematical Logic? A Survey". In *Proof, Computation and Agency*. Dordrecht: Springer, 2011, s. 3–17.

[11] Brněnský rodák Kurt Gödel (1906–1978) byl asi nejvýznamnějším matematickým logikem dvacátého století. Studoval ve Vídni a pak většinu života působil v americkém Princetonu. Více o něm i překlady jeho prací je možné najít v knize MALINA, Jaroslav; NOVOTNÝ, Jan (eds.). *Kurt Gödel*. Brno: Nadace Universitas Masarykiana, 1996.

[12] Gödelův důkaz, který byl v rámci logiky zcela převratný, prokázal, že pro žádný jazyk, ve kterém je možné vyjádřit aritmetiku, není možné vytvořit axiomatický systém tak, abychom dokázali vše, co bychom měli (a co je intuitivně pravdivé). Viz NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R.; HOFSTADTER, Douglas R. *Gödel's Proof*. New York: New York University Press, 2001; v českém překladu vyšlo jako *Gödelův důkaz*. Brno: Vutium, 2003; nebo GOLDSTEINOVÁ, Rebecca: *Incompletness*, London: Norton, 2005; v českém překladu *Neúplnost: Důkaz a paradox Kurta Gödela*. Praha: Dokořán, 2005.

[13] Viz např. TROELSTRA, A. S.; SCHWICHTENBERG, Helmut. *Basic Proof Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000; nebo NEGRI, Sara; PLATO, Jan von; RANTA, Aarne. *Structural Proof Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

z poznání, že jsou-li umělé jazyky logiky *de facto* matematické struktury, je i relace dokazatelnosti svou podstatou matematický vztah. Navíc, argumentoval Hilbert, to bude vztah studovatelný metodami té nejelementárnější části matematiky – aritmetiky jakožto nauky o sčítání a násobení přirozených čísel. To je dáno tím, že výroky jakéhokoli přesně vymezeného jazyka můžeme očíslovat a namísto s nimi pak můžeme pracovat s jejich čísly – takže např. dokazatelnost se z tohoto pohledu bude jevit jako určitá aritmetická operace. Mohli bychom si třeba představit, že čísla výroků budou taková, že jakýkoli úsudek bude správný právě tehdy, když bude součet čísel předpokladů dělitelný číslem závěru. Ve skutečnosti ovšem nepůjde o tak jednoduché početní operace, jako je dělení, ale o operace neskonale složitější. Gödelův objev znamenal stanovení zásadních mezí možným ambicím takového programu; studium dokazatelnosti a správnosti úsudků za pomoci teorie důkazů však i přesto přinášelo zajímavé výsledky.

Gödelův důkaz však současně nahlodal konsenzus o tom, že kalkuly mohou být univerzálním nástrojem logiky, protože ukázal, že kalkuly nedosáhnou všude tam, kam by měly – z Gödelova důkazu totiž plyne, že ať pro aritmetiku uděláme kalkul jakkoli, nikdy v něm nebudeme moci dokázat všechno, co je pravda. Z toho důvodu mnoho logiků zaujal alternativní, „sémantický“ přístup k logice, který kolem poloviny dvacátého století začal propagovat zejména Alfred Tarski[14].

Tarski měl pocit, že nemůžeme-li pravdivost rekonstruovat jako dokazatelnost, musíme nějak teoreticky uchopit přímo ji. Tarski tak již ve třicátých letech přišel s vlivnou

[14] Alfred Tarski (1901–1983) byl polský logik, který strávil většinu života v USA a v Kalifornii vybudoval zřejmě nejvlivnější matematicko-logickou školu dvacátého století.

matematickou teorií pravdivosti[15] a v jejím rámci se dopracoval k poznání, že abychom mohli pravdu adekvátně postihnout, musíme v rámci její teorie zachytit i význam – nebo nějakou jeho relevantní část. (Například odpověď na otázku, kdy je pravdivý nějaký výrok skládající se z podmětu a přísudku, je podle Tarského v podstatě taková, že je to tehdy, když předmět označovaný podmětem má vlastnost vyjadřovanou přísudkem – takže potřebujeme nějakou teorii předmětů a vlastností a jejich sémantických vztahů k výrazům.) Od toho se postupně odvinula tzv. teorie modelů, která na relativně dlouhou dobu poněkud zastínila teorii důkazů a s ní spojené teorie logických kalkulů.

V případě standardní logiky se teorie modelů v podstatě zabývá vztahy mezi logickými jazyky a určitými algebraickými strukturami, tzv. modelovými strukturami, jejichž prvky jsou výrazům těchto jazyků přiřazovány jako jejich denotáty („významy"). Každá taková struktura se skládá z nějakého *univerza* individuí (která jsou jako denotáty přiřazována „jménům" tohoto jazyka), z podmnožin tohoto univerza a z relací mezi jeho prvky (které jsou přiřazovány predikátům), plus případně z nějaké další nadstavby. Takové přiřazení denotátů neboli *interpretace* jazyka, která činí nějaký výrok nebo nějakou množinu výroků pravdivou, se pak nazývá *modelem* tohoto výroku či této množiny.

Teorie modelů se rozrostla v košatou matematickou disciplínu, v jejímž rámci se řeší např. to, jaké skupiny struktur lze vymezit určitými jazykovými prostředky. (Úzce se přitom propojila s matematickou disciplínou známou jako *univerzální*

[15] Viz TARSKI, A. „The Semantic Conception of Truth". *Philosophy and Phenomenological Research*. 1944, č. 4, s. 341–375; v českém překladu „Sémantické pojetí pravdy a základy sémantiky". In: PEREGRIN, J. (ed.): *Logika 20. Století: Mezi filosofií a matematikou*. Praha: Filosofia, 2006, s. 135–176.

algebra.)[16] Z hlediska logiky je ovšem podstatné především, že tento pohled poskytuje mnohem přímočařejší uchopení logického vyplývání, než jaký nám jsou schopny zprostředkovat kalkuly. Z hlediska Tarského vyplývá nějaký závěr z určitých předpokladů tehdy, když je za každých okolností, kdy jsou pravdivé předpoklady, pravdivý i závěr – neboli když je modelem závěru každá interpretace, která je modelem předpokladů.

Zdá se, že takto jsme tedy uchopili vyplývání adekvátním způsobem. Má to však háček. Zatímco v případě dokazatelnosti je možné, je-li nějaký závěr z nějakých prostředků dokazatelný, takový důkaz alespoň v principu zkonstruovat (i když fakticky může být sestavení důkazu nad naše síly), v případě modelově teoreticky pojatého vyplývání někdy nelze to, že je něco důsledkem něčeho jiného, prokázat ani v principu. Z hlediska základů logiky nám tedy teorie modelů poskytuje explikaci vyplývání a správnosti úsudků, která je sice adekvátní, ale nemusí poskytnout žádné vodítko, jak zjistit, zda je daný úsudek správný.

V posledním desetiletí dvacátého století začal v rámci logiky probíhat velký revival teorie důkazů a potažmo logických kalkulů. Souvisel především s otevřením širokých nových prostorů pro zkoumání v rámci teorie důkazů; což má zase spojitost s rozvolněním rámce, v němž tato teorie operuje. Tento rámec byl totiž původně sevřen principy, které byly chápány jako víceméně nezpochybnitelné *logické zákony*; a právě ty začaly být v moderní logice zpochybňovány. Zde se konečně dostáváme k tomu, co je v logice nového.

[16] Základy je možné najít ve výše uvedené Sochorově knize; podrobněji viz např. HODGES, Wilfrid. *A Shorter Model Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. V češtině viz také JEŽEK, Jaroslav. *Univerzální algebra a teorie modelů*, Praha: SNTL, 1976.

Summary

The current state of the art of logic in the early 21th century is such that after having appropriated the methods of modern mathematics, it has been branching out into an ever wider area. Apart from the calculus of classical logic, which was for a long time considered the only truly correct logic, new alternative calculi are emerging now and alternatives emerge even to the previously seemingly self-evident principles of building the calculi. Moreover, logic, after it has extricated itself from the grasp of its fellow disciplines, such as psychology, linguistics or metaphysics, is now entering into a dialogue with them, forming new, fruitful alliances. It keeps intensifying its cooperation with mathematics, but also intensifies the critical reflection of how it actually benefits from mathematics and mathematical models of real reasoning.

Key words

argumentation, logic, logical laws, reasoning

O autorovi

Jaroslav Peregrin získal profesuru v oboru logika na Filozofické fakultě Univerzity Karlovy; v současné době pracuje v oddělení logiky ve Filosofickém ústavu AV ČR a přednáší na Karlově Univerzitě a na Univerzitě Hradec Králové. Zabývá se především sémantikou, analytickou filozofií a filozofií logiky. Je autorem řady odborných článků a knih, například *Logika a logiky* (2004) a *Kapitoly z analytické filosofie* (2005) a především pak populární *Filozofie pro normální lidi* (2008).

Jaroslav Peregrin

Co je nového v logice

Vydala: Nová beseda, z. s.

Redakce: Františka Jirousová
Jazykové korektury: Jan Mazanec
Faktografická redakce: Ľuboš Slovák
Odborný posudek: Petr Dvořák
Produkce: Anna Štičková
Redakční spolupráce: Andrea Slováková
Rejstřík: Jaroslav Peregrin, Ľubica Slováková
Grafická úprava: Belavenir
Sazba: Ludmila Nováková
Fotografie: Karel Cudlín
Tisk: Těšínské papírny

1. vydání
Praha 2018

ISBN 978-80-906751-5-5

www.novabeseda.cz